2020

MATHEMATICS (General)

Paper Code : I - A & B

[New Syllabus]

Important Instructions for Multiple Choice Question (MCQ)

- Write Subject Name and Code, Registration number, Session and Roll number in the space provided on the Answer Script.

  Example : Such as for Paper III-A (MCQ) and III-B (Descriptive).

  Subject Code : | III | A | & | B |

  Subject Name : | |

- Candidates are required to attempt all questions (MCQ). Below each question, four alternatives are given [i.e. (A), (B), (C), (D)]. Only one of these alternatives is 'CORRECT' answer. The candidate has to write the Correct Alternative [i.e. (A)/(B)/(C)/(D)] against each Question No. in the Answer Script.

  Example — If alternative A of 1 is correct, then write :

  1. — A

- There is no negative marking for wrong answer.

মাল্টিপল চয়েস প্রশ্নের (MCQ) জন্য জরুরী নির্দেশাবলী

- উত্তরপত্রে নির্দেশিত স্থানে বিষয়ের (Subject) নাম এবং কোড, রেজিস্ট্রেশন নম্বর, সেশন এবং রোল নম্বর লিখতে হবে।

  উদাহরণ — যেমন Paper III-A (MCQ) এবং III-B (Descriptive)।

  Subject Code : | III | A | & | B |

  Subject Name : | |

- পরীক্ষার্থীদের সবগুলি প্রশ্নের (MCQ) উত্তর দিতে হবে। প্রতিটি প্রশ্নে চারটি করে সম্ভাব্য উত্তর, যথাক্রমে (A), (B), (C) এবং (D) করে দেওয়া আছে। পরীক্ষার্থীকে তার উত্তরের স্বপক্ষে (A) / (B) / (C) / (D) সঠিক বিকল্পটিকে প্রশ্ন নম্বর উল্লেখসহ উত্তরপত্রে লিখতে হবে।

  উদাহরণ — যদি 1 নম্বর প্রশ্নের সঠিক উত্তর **A** হয় তবে লিখতে হবে :

  1. — A

- ভুল উত্তরের জন্য কোন নেগেটিভ মার্কিং নেই।

Paper Code : I - A

Full Marks : 50 Time : One Hour

Notations and symbols have their usual meanings.

Choose the correct answer.

Each question carries 2 marks.

1. Let n be a positive integer and $a > b > 0$. If $a^{\frac{1}{n}}$ and $b^{\frac{1}{n}}$ are positive nth roots of a and b respectively, then which of the following is true?

(A) $a^{\frac{1}{n}} = b^{\frac{1}{n}}$

(B) $a^{\frac{1}{n}} < b^{\frac{1}{n}}$

(C) $a^{\frac{1}{n}} > b^{\frac{1}{n}}$

(D) None of above

1. ধরা যাক n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং $a > b > 0$। যদি $a^{\frac{1}{n}}$ এবং $b^{\frac{1}{n}}$ যথাক্রমে a এবং b-এর ধনাত্মক n তম বীজ হয়, তবে কোন্ উক্তিটি সত্য?

(A) $a^{\frac{1}{n}} = b^{\frac{1}{n}}$

(B) $a^{\frac{1}{n}} < b^{\frac{1}{n}}$

(C) $a^{\frac{1}{n}} > b^{\frac{1}{n}}$

(D) উপরের কোনোটিই নয়

2. The linear Diophantine equation $ax + by = c$ has a solution if and only if —

(A) $gcd(a, c) | b$

(B) $gcd(a, b) | c$

(C) $gcd(b, c) | a$

(D) $c | gcd(a, b)$

2. রৈখিক ডাইওফ্যান্টাইন (Diophantine) সমীকরণ $ax + by = c$ -এর সমাধান থাকবে যদি এবং কেবল যদি —

(A) $gcd(a, c) | b$

(B) $gcd(a, b) | c$

(C) $gcd(b, c) | a$

(D) $c | gcd(a, b)$

3. The maximum value of $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\sin\theta & 1 \\ 1+\cos\theta & 1 & 1 \end{vmatrix}$ (θ is real number) is —

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(C) $\sqrt{2}$

(D) $2\sqrt{3}$

3. যদি θ একটি বাস্তব সংখ্যা হয়, তবে $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\sin\theta & 1 \\ 1+\cos\theta & 1 & 1 \end{vmatrix}$ -এর সর্বোচ্চ মান হবে —

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(C) $\sqrt{2}$

(D) $2\sqrt{3}$

4. The curve represented by the equations $x = \sin^2 t, y = 2\cos t$ is —

(A) a parabola

(B) a circle

(C) a hyperbola

(D) an ellipse

4. $x = \sin^2 t, y = 2\cos t$ সমীকরণদ্বয় দ্বারা যে বক্ররেখাকে নির্দেশ করে, সেটি হলো —

(A) অধিবৃত্ত

(B) বৃত্ত

(C) পরাবৃত্ত

(D) উপবৃত্ত

5. The curve $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ has —

(A) only one vertical asymptote

(B) only one horizontal asymptote

(C) exactly one vertical and one horizontal asymptote

(D) none of these

5. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ বক্ররেখাটির জন্য —

(A) কেবলমাত্র একটি উলম্ব অসীম পথ আছে

(B) কেবলমাত্র একটি অনুভূমিক অসীম পথ আছে

(C) নির্দিষ্টভাবে একটি উলম্ব ও একটি অনুভূমিক অসীম পথ আছে

(D) কোনোটিই নয়

6. $\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}}$ is

(A) $\frac{1}{p+1}$

(B) $\frac{1}{p-1}$

(C) $\frac{1}{1-p}$

(D) $\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$

6. $\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}}$ হলো —

(A) $\frac{1}{p+1}$

(B) $\frac{1}{p-1}$

(C) $\frac{1}{1-p}$

(D) $\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$

7. The value of $(1 + i)^{100}$ is —

(A) $2^{100}(\cos 100\pi + i \sin 100\pi)$

(B) $2^{100}(\cos 25\pi + i \sin 25\pi)$

(C) $2^{50}(\cos 100\pi + i \sin 100\pi)$

(D) $2^{50}(\cos 25\pi + i \sin 25\pi)$

7. $(1 + i)^{100}$-এর মান হবে —

(A) $2^{100}(\cos 100\pi + i\sin 100\pi)$

(B) $2^{100}(\cos 25\pi + i\sin 25\pi)$

(C) $2^{50}(\cos 100\pi + i\sin 100\pi)$

(D) $2^{50}(\cos 25\pi + i\sin 25\pi)$

8. If every element of a group G is its own inverse, then G is —

(A) finite

(B) infinite

(C) cyclic

(D) abelian

8. যদি একটি দল G-এর প্রতিটি বিন্দু তার নিজের অনোন্যক হয় তবে G —

(A) সসীম

(B) অসীম

(C) চক্রীক (cyclic)

(D) অ্যাবেলিয়ান (abelian)

9. The least upper bound of the set $\{\frac{1}{n} : n$ is a positive integer$\}$ is —

(A) 1

(B) 0

(C) − 1

(D) None of the above

9. $\{\frac{1}{n} : n$ হলো একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা$\}$ — এই সেটটির কমপক্ষে উপরের আবদ্ধ (Least upper bound) হলো —

(A) 1

(B) 0

(C) -1

(D) উপরের কোনোটিই নয়

10. The polar form of a complex number is —

(A) $r(\tan\theta + i\cot\theta)$

(B) $r(\sec\theta + i\tan\theta)$

(C) $r(\cos\theta + i\sin\theta)$

(D) $r(\sin\theta + i\cos\theta)$

10. যে কোনো জটিল সংখ্যার পোলার গঠনটি হলো —

(A) $r(\tan\theta + i\cot\theta)$

(B) $r(\sec\theta + i\tan\theta)$

(C) $r(\cos\theta + i\sin\theta)$

(D) $r(\sin\theta + i\cos\theta)$

11. The values of x for which the matrix $A=\begin{bmatrix} 3-x & 2 & 2 \\ 2 & 4-x & 1 \\ -2 & -4 & -1-x \end{bmatrix}$ is singular are —

(A) 0, 1

(B) 1, 3

(C) 3, 2

(D) 0, 3

11. x-এর কোণ মানদ্বয়ের জন্য ম্যাট্রিক্স $A=\begin{bmatrix} 3-x & 2 & 2 \\ 2 & 4-x & 1 \\ -2 & -4 & -1-x \end{bmatrix}$ টি সিঙ্গুলার (singular) হবে?

(A) 0, 1

(B) 1, 3

(C) 3, 2

(D) 0, 3

12. If $\vec{a}=\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k}, \vec{b}=3\hat{i}-2\hat{j}+7\hat{k}$ and $\vec{c}=2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}$, then a vector $\vec{d}$ which is perpendicular to both $\vec{a}$ and $\vec{b}$ and $\vec{c}.\vec{d}=15$ is —

(A) $\frac{1}{3}\left(160\hat{i}-5\hat{j}+70\hat{k}\right)$

(B) $\frac{1}{3}\left(160\hat{i}-5\hat{j}-70\hat{k}\right)$

(C) $\frac{1}{3}\left(-160\hat{i}-5\hat{j}+70\hat{k}\right)$

(D) $\frac{1}{3}\left(160\hat{i}+5\hat{j}+70\hat{k}\right)$

12. ধরা যাক, $\vec{a} = \hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}, \vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 7\hat{k}$ এবং $\vec{c} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$, তবে ভেক্টর $\vec{d}$ যাহা $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ উভয়ের সহিত উলম্ব এবং $\vec{c}.\vec{d} = 15$ তাহা হলো —

(A) $\frac{1}{3}\left(160\hat{i} - 5\hat{j} + 70\hat{k}\right)$

(B) $\frac{1}{3}\left(160\hat{i} - 5\hat{j} - 70\hat{k}\right)$

(C) $\frac{1}{3}\left(-160\hat{i} - 5\hat{j} + 70\hat{k}\right)$

(D) $\frac{1}{3}\left(160\hat{i} + 5\hat{j} + 70\hat{k}\right)$

13. .. C is the midpoint of AB and P is any point outside of AB, then —

(A) $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{PC}$

(B) $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC}$

(C) $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC} = \vec{0}$

(D) $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$

13. যদি C বিন্দুটি AB-এর মধ্য বিন্দু হয় এবং AB-এর বাইরে অবস্থিত কোন বিন্দু যদি P হয় তবে —

(A) $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{PC}$

(B) $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC}$

(C) $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC} = \vec{0}$

(D) $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$

14. If the normals at two points P and Q to the parabola $y^2 = 4ax$ intersect at a third point R on the curve, then the product of the ordinates of P and Q is —

(A) $4a^2$

(B) $2a^2$

(C) $-4a^2$

(D) $8a^2$

14. $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তটির P এবং Q বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্বদ্বয় যদি অধিবৃত্তটির উপর তৃতীয় কোন বিন্দু R-এ ছেদ করে তা হলে P এবং Q-এর কোণটির গুণফল হবে —

(A) $4a^2$

(B) $2a^2$

(C) $-4a^2$

(D) $8a^2$

15. The angle between the lines represented by the equation $2x^2 - 7xy + 3y^2 = 0$ is —

(A) 15°

(B) 35°

(C) 45°

(D) 65°

15. $2x^2 - 7xy + 3y^2 = 0$ যুগ্ম সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের মান হবে —

(A) 15°

(B) 35°

(C) 45°

(D) 65°

16. The equation of pair of straight lines through (0, 0) which is perpendicular to $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$, is —

(A) $bx^2 + 2hxy + ay^2 = 0$

(B) $bx^2 - 2hxy + ay^2 = 0$

(C) $ax^2 - 2hxy + by^2 = 0$

(D) $-ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$

16. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ সরলরেখাদ্বয়ের উপর লম্ব এবং (0, 0) বিন্দুগামী সরলরেখাদ্বয়ের সমীকরণ হলো —

(A) $bx^2 + 2hxy + ay^2 = 0$

(B) $bx^2 - 2hxy + ay^2 = 0$

(C) $ax^2 - 2hxy + by^2 = 0$

(D) $-ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$

17. If the angle between the straight line $x = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{\lambda}$ and the plane $x + 2y + 3z = 4$ is $\cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{5}{14}}\right)$, then the value of λ is —

(A) $\frac{2}{5}$

(B) $\frac{5}{3}$

(C) $\frac{2}{3}$

(D) $\frac{3}{2}$

17. যদি সরলরেখা $x=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{\lambda}$ এবং $x+2y+3z=4$ প্লেন মধ্যবর্তী কোণ $\cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{5}{14}}\right)$ হয়, তবে λ-এর মান হবে —

(A) $\frac{2}{5}$

(B) $\frac{5}{3}$

(C) $\frac{2}{3}$

(D) $\frac{3}{2}$

18. If $y=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^n$, then the value of $\left(1+x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}$ is —

(A) n^2y

(B) $-n^2y$

(C) $-y$

(D) n^2

18. যদি $y=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^n$ তবে $\left(1+x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}$-এর মান —

(A) n^2y

(B) $-n^2y$

(C) $-y$

(D) n^2

19. . . . . c in Rolle's theorem for the function $f(x) = e^x \sin x, x \in [0, \pi]$ is —

(A) $\frac{\pi}{2}$

(B) $\frac{3\pi}{4}$

(C) $\frac{3\pi}{2}$

(D) π

19. $f(x) = e^x \sin x, x \in [0, \pi]$-এর জন্য রোলস্ উপপাদ্য (Rolle's theorem) অনুসারে c-এর মান হবে —

(A) $\frac{\pi}{2}$

(B) $\frac{3\pi}{4}$

(C) $\frac{3\pi}{2}$

(D) π

20. If $f(x) = \frac{\ln(1+ax) - \ln(1-bx)}{x}, x \neq 0,$ is continuous at $x = 0$, then $f(0) =$

(A) $a - b$

(B) $a + b$

(C) $\ln a - \ln b$

(D) $\ln a + \ln b$

20. যদি $f(x)=\frac{\ln(1+ax)-\ln(1-bx)}{x}, x\neq 0,$ অপেক্ষকটি $x = 0$ বিন্দুতে সন্তত হয় তবে $f(0)=$

(A) $a - b$

(B) $a + b$

(C) $\ln a - \ln b$

(D) $\ln a + \ln b$

21. If $y=(\tan x)^{\sin x}$, then $\frac{dy}{dx}$ is —

(A) $\sec x+\cos x$

(B) $\sec x+\log\tan x$

(C) $(\tan x)^{\sin x}$

(D) none of these

21. যদি $y=(\tan x)^{\sin x}$ হয় তবে $\frac{dy}{dx}$ হবে —

(A) $\sec x+\cos x$

(B) $\sec x+\log\tan x$

(C) $(\tan x)^{\sin x}$

(D) কোনোটিই নয়

22. The identity element in $G = \{2, 4, 6, 8\}$ under multiplication modulo 10 is —

(A) 2

(B) 4

(C) 6

(D) 8

22. $G = \{2, 4, 6, 8\}$ দলটির মডিউলো (modulo) 10 গুণফলের ভিত্তিতে অভেদমূলক (identity element)টি হল —

(A) 2

(B) 4

(C) 6

(D) 8

23. The values of p for which the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{2+n^3}$ converges are —

(A) $p < 2$

(B) $p > 2$

(C) $p = 2$

(D) None of these

23. p-এর কোন্ মান (গুলির) জন্য $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{2+n^3}$ অনুক্রমটি অভিসারি হবে?

(A) $p < 2$

(B) $p > 2$

(C) $p = 2$

(D) কোনোটিই নয়

24. If $b > 0$, then $\lim_{x \to b} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{b}}{x - b} =$

(A) 0

(B) $\frac{1}{2\sqrt{b}}$

(C) $2\sqrt{b}$

(D) b

24. যদি $b > 0$, তবে $\lim_{x \to b} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{b}}{x - b} =$

(A) 0

(B) $\frac{1}{2\sqrt{b}}$

(C) $2\sqrt{b}$

(D) b

25. The direction cosines for $\vec{A} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ are —

(A) $\frac{2}{\sqrt{45}}, \frac{4}{\sqrt{45}}, -\frac{5}{\sqrt{45}}$

(B) $\frac{4}{\sqrt{45}}, 0, -\frac{4}{\sqrt{45}}$

(C) $\frac{3}{\sqrt{45}}, \frac{2}{\sqrt{45}}, \frac{5}{\sqrt{45}}$

(D) $\frac{1}{\sqrt{45}}, \frac{2}{\sqrt{45}}, \frac{5}{\sqrt{45}}$

25. $\vec{A} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ -এর দিক কোসাইনগুলি হলো —

(A) $\frac{2}{\sqrt{45}}, \frac{4}{\sqrt{45}}, -\frac{5}{\sqrt{45}}$

(B) $\frac{4}{\sqrt{45}}, 0, -\frac{4}{\sqrt{45}}$

(C) $\frac{3}{\sqrt{45}}, \frac{2}{\sqrt{45}}, \frac{5}{\sqrt{45}}$

(D) $\frac{1}{\sqrt{45}}, \frac{2}{\sqrt{45}}, \frac{5}{\sqrt{45}}$

2020

MATHEMATICS (General)

Paper Code : I - B

[New Syllabus]

Full Marks : 100 Time : Three Hours

The figures in the margin indicate full marks.

Notations and symbols have their usual meanings.

Group - A

(Marks : 15)

Answer any *three* questions.

1. If $x = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $y = \cos\beta + i\sin\beta$ and $z = \cos\gamma + i\sin\gamma$ and if $x + y + z = 0$, then show that $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$. 5

2. (a) Find the equation whose roots are the reciprocals of the roots of the equation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$.

   (b) If $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ are the roots of the equation $x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$, then find the value of $\sum\alpha_1\alpha_2...\alpha_{n-1}$. 4+1

3. Solve the equation $x^3 - 3x - 1 = 0$ by Cardan's method. 5

4. (a) Prove that one root of the equation $27x^4 - 48x^2 - 12x + 13 = 0$ lies in (0, 1) and another root lies in (1, 2).

   (b) If z_1 and z_2 are two complex numbers, then show that $\arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$. 3+2

5. If $x = \log \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2}\right)$, then prove that $y = -i \log \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ix}{2}\right)$. 5

Group - B

(Marks : 15)

Answer any *three* questions.

6. (a) If $A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, then find the value of $(A + I_3)(A - I_3)$, where I_3 is a 3×3 unit matrix.

   (b) If $\{u_n\}$ is a null sequence, then prove that $\{|u_n|\}$ is also a null sequence. 3+2

7. Solve by Cramer's rule : 5

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 3z &= 0 \\ 5x - 2y + 2z &= 19 \\ x + 7y - 5z &= 5 \end{aligned}$$

8. Show that the quadratic form $yz + zx + xy$ is indefinite. What is its rank? 3+2

9. Show that the set of all nth roots of unity forms a cyclic group generated by $e^{\frac{2\pi i}{n}}$. 5

10. Give the definition of a commutative group. Give an example of a commutative and a non-commutative group. 5

Group - C

(Marks : 10)

Answer any *two* questions.

11. (a) If $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ are unit vectors such that $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$, then find the value of $\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}$.

    (b) Find λ, if the vectors $\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}, \lambda\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ and $3\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k}$ are coplanar. 3+2

12. A particle acted on by constant forces $4\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$ and $3\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ is displaced from the point $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ to the point $5\hat{i}+4\hat{j}+\hat{k}$. Find the work done by the resultant force. 5

13. If a unit vector $\vec{a}$ makes angles $\frac{\pi}{3}$ with $\hat{i}$, $\frac{\pi}{4}$ with $\hat{j}$ and an acute angle θ with $\hat{k}$, then find θ. Hence write the components of $\vec{a}$. 5

14. Using vector method, prove that $\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$. 5

Group - D

(Marks : 25)

Answer any *five* questions.

15. Find the equation of the directrix of the conic $\frac{l}{r}=1+e\cos\theta$. 5

16. By suitable transformation, remove the term containing xy from the equation $11x^2+4xy+14y^2=5$. 5

17. Show that if the polar of P with respect to an ellipse passes through Q, then the polar of Q passes through P. 5

18. If the equation $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ represents two parallel straight lines, then show that the distance between them is $2\sqrt{\frac{g^2 - ac}{a(a+b)}}$. 5

19. The perpendiculars *PL, PM, PN* are drawn from the point *P*(*a*, *b*, *c*) to the coordinate planes. Show that the equation of the plane *LMN* is $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 2$. 5

20. Find the asymptotes of the hyperbola $2x^2 - xy - y^2 + 2x - 2y + 2 = 0$. 5

21. Show that the condition that the plane $ax + by + cz = 0$ may cut the cone $yz + zx + xy = 0$ in perpendicular line is $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$. 5

Group - E

(Marks : 35)

Answer any *seven* questions.

22. Show that the pedal equation of the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ with regard to the centre is $\frac{a^2b^2}{p^2} = a^2 + b^2 - r^2$. 5

23. If $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{for } x \neq 0 \\ 0, & \text{for } x = 0, \end{cases}$

then show that the function *f* is continuous and differentiable at $x = 0$. 5

24. Show that the length of the perpendicular from the foot of the ordinate of any point on the tangent at the same point to the curve $y = c\cosh\frac{x}{c}$ is constant. 5

25. If $y = x^{n-1}\log x$, then show that $y_n = \frac{(n-1)!}{x}$. 5

26. Deduce the equation of the normal to the ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ at $(a, 0)$. 5

27. If $x_n = \frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+...+\frac{n}{n^2}$, then show that the sequence $\{x_n\}_n$ is monotonically increasing. Also test the convergence of the sequence. 5

28. (a) Define Cauchy sequence.

(b) If $f(x) = x(x-1)(x-2)$ and $a = 0, b = \frac{1}{2}$, then find c from $f(b)-f(a) = (b-a)f'(c)$. 1+4

29. Show that the radius of curvature at the vertex of the parabola $y^2 = 4x$ is $\frac{1}{2}$. 5

30. Find all the stationary points of the function $f(x, y) = xy(a-x-y)$ and test them for extreme values. 5

31. If $f = \sin^{-1}\left(\frac{x^2+y^2}{x+y}\right)$ then show that $xf_x + yf_y = \tan f$. 5

বঙ্গানুবাদ

বিভাগ - ক

(মান : ১৫)

যে কোন তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

1. যদি $x=\cos\alpha+i\sin\alpha,\ y=\cos\beta+i\sin\beta$ এবং $z=\cos\gamma+i\sin\gamma$ এবং যদি $x+y+z=0,$ হয় তবে দেখাও যে $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$। 5

2. (a) $x^3+px^2+qx+r=0$ সমীকরণটির বীজের অনোন্যক যে সমীকরণের বীজ, সেই সমীকরণটি নির্ণয় কর।

   (b) যদি $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\ x+a_n=0,$ সমীকরণটির বীজ $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ হয় তবে $\sum\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}$-এর মান নির্ণয় কর। 4+1

3. কার্ডান পদ্ধতিতে $x^3-3x-1=0$-এর সমাধান কর। 5

4. (a) দেখাও যে, $27x^4-48x^2-12x+13=0$ সমীকরণটির একটি বীজ (0, 1)-এর মধ্যে আছে এবং অন্য একটি বীজ (1, 2)-এর মধ্যে আছে।

   (b) যদি z_1 এবং z_2 দুটি জটিল সংখ্যা হয় তবে দেখাও যে, $\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2.$ 3+2

5. যদি $x=\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{y}{2}\right),$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $y=-i\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ix}{2}\right).$ 5

বিভাগ - খ

(মান : ১৫)

যে কোন তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

6. (a) যদি $A+I_3=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ -1 & 1 & 3\\ -2 & -3 & 1\end{pmatrix}$, তবে $(A+I_3)(A-I_3)$-এর মান নির্ণয় কর, যেখানে I_3 একটি 3×3 ক্রমের একক ম্যাট্রিক্স।

(b) যদি $\{u_n\}$ একটি শূন্য (null) ক্রম হয়, তবে প্রমাণ কর যে $\{|u_n|\}$ -এও একটি শূন্য ক্রম হবে। 3+2

7. ক্রামারের নিয়মে সমাধান কর : 5

$$2x+3y-3z=0$$
$$5x-2y+2z=19$$
$$x+7y-5z=5$$

8. দেখাও যে $yz+zx+xy$ এই দ্বিঘাত রূপটি অনির্দিষ্ট। এর মাত্রা (rank) কত? 3+2

9. দেখাও যে, একের n-তম মূলদ্বয়ের সেটটি $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ সঞ্চালিত এক চক্রীয় দল গঠন করে। 5

10. বিনিময়যোগ্য দলের (Commutative group)-এর উদাহরণসহ সংজ্ঞা দাও। একটি অবিনিময়যোগ্য দলের উদাহরণ দাও। 5

বিভাগ - গ

(মান : ১০)

যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

11. (a) যদি $\vec{a},\vec{b}$ এবং $\vec{c}$ একক ভেক্টর হয় এবং $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$, তবে $\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}.$ -এর মান নির্ণয় কর।

(b) যদি $\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}, \lambda\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ এবং $3\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k}$ ভেক্টরগুলি সামতলিক (coplanar) হয় তবে λ-এর মান নির্ণয় কর। 3+2

12. যদি কোন বস্তুর উপর $4\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$ এবং $3\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ বল প্রয়োগ দ্বারা বস্তুটির সরণ $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ বিন্দু থেকে $5\hat{i}+4\hat{j}+\hat{k}$ বিন্দুতে করা হয়, তবে লব্ধ বলের কার্যক্ষমতা নির্ণয় কর। 5

13. যদি কোন একক ভেক্টর $\vec{a}, \hat{i}$-এর সাথে $\frac{\pi}{3}$ কোণে অবস্থান করে, $\hat{j}$-এর সাথে $\frac{\pi}{4}$ এবং $\hat{k}$ এর সাথে θ কোণে অবস্থান করে, যেখানে θ একটি সূক্ষ্মকোণ, তবে θ-এর মান নির্ণয় কর। ভেক্টর $\vec{a}$-এর উপাদানগুলি উল্লেখ কর। 5

14. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর, $\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$. 5

বিভাগ - ঘ

(মান : ২৫)

যে কোন **পাঁচটি** প্রশ্নের উত্তর দাও।

15. $\frac{l}{r}=1+e\cos\theta$ শংকুচ্ছেদটির নিয়ামকের সমীকরণটি লেখ। 5

16. একটি যথোপযুক্ত রূপান্তরের সহায়তায় $11x^2+4xy+14y^2=5$ সমীকরণটি থেকে xy পদটি বিলোপ কর। 5

17. যদি কোন অধিবৃত্ত সাপেক্ষে P বিন্দুর পোলার Q বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে তবে দেখাও যে, Q বিন্দুর পোলার P বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করবে। 5

18. $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ সমীকরণটি দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা সূচিত করলে, দেখাও যে, তাদের মধ্যে দূরত্ব $2\sqrt{\frac{g^2-ac}{a(a+b)}}$। 5

19. যদি $P(a, b, c)$ বিন্দু থেকে স্থানাঙ্ক তলের উপর PL, PM, PN লম্ব অঙ্কন করা হয় তবে দেখাও যে LMN তলের সমীকরণটি $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=2$ হবে। 5

20. $2x^2-xy-y^2+2x-2y+2=0$ পরাবৃত্তটির অনন্তস্পর্শী রেখাদ্বয় নির্ণয় কর। 5

21. যদি $ax+by+cz=0$ তলটি $yz+zx+xy=0$ শঙ্কুকে লম্বভাবে ছেদ করে, তবে $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$। 5

বিভাগ - ঙ

(মান : ৩৫)

যে কোন **সাতটি** প্রশ্নের উত্তর দাও।

22. দেখাও যে $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের কেন্দ্রের সাপেক্ষে উহার pedal সমীকরণটি হল $\frac{a^2b^2}{p^2}=a^2+b^2-r^2$। 5

23. যদি $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{for } x\neq 0 \\ 0, & \text{for } x=0, \end{cases}$ হয়

তবে দেখাও যে, $x=0$ বিন্দুতে f অপেক্ষকটি সন্তত ও অবকলনযোগ্য। 5

24. দেখাও যে, $y=c\cosh\frac{x}{c}$-এর যে কোন বিন্দুর কোটির পাদবিন্দু থেকে ঐ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের লম্ব দূরত্ব ধ্রুবক হবে। 5

25. যদি $y=x^{n-1}\log x$ হয় তবে দেখাও যে, $y_n=\frac{(n-1)!}{x}$। 5

26. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের $(a, 0)$ বিন্দুতে normal-এর সমীকরণ নির্ণয় কর। 5

27. যদি $x_n=\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+...+\frac{n}{n^2}$ হয় তবে দেখাও যে $\{x_n\}_n$ অনুক্রমটি ক্রমবর্ধমান। এটি অভিসারি কিনা পরীক্ষা কর। 5

28. (a) Cauchy sequence-এর সংজ্ঞা দাও।

(b) যদি $f(x)=x(x-1)(x-2)$ এবং $a=0, b=\frac{1}{2}$ হয় তবে c-এর মান নির্ণয় কর যেখানে $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$। 1+4

29. দেখাও যে $y^2=4x$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্ধ (radius of curvature) $\frac{1}{2}$ হবে। 5

30. $f(x,y)=xy(a-x-y)$ অপেক্ষকটির সমস্ত স্থির বিন্দুগুলি নির্ণয় কর এবং সেগুলি গরিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ বিন্দু কিনা পরীক্ষা কর। 5

31. যদি $f=\sin^{-1}\left(\frac{x^2+y^2}{x+y}\right)$ হয় তবে দেখাও যে, $xf_x+yf_y=\tan f$। 5